Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
27 octombrie 2013

Soluţii

BARAJUL al V-lea

Problemă. Să se determine numerele $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ şi $\overline{ef}$ care verifică simultan relaţiile $\overline{ab}+\overline{ef}=4\cdot\overline{cd}$ şi $\overline{ab}=\sqrt{\overline{cdef}}$.

Soluţie: Notăm $x=\overline{ab}$, y=$\overline{cd}$, $z=\overline{ef}$.
Relaţiile din enunţ devin:

$$\begin{cases} 4y=x+z \\ x=\sqrt{100y+z} \\ x,z,y\in\overline{10,99} \end{cases}$$

$x^2=100y+z\Rightarrow x^2+x=104y\Rightarrow x^2+x=8\cdot 13\cdot y\Rightarrow 8/x\cdot(x+1)\Rightarrow 8/x$ sau $8/(x+1)$

Din $13/x\cdot(x+1)\Rightarrow 13/x$ sau $13/(x+1)$.

Există cazurile:

I. $8/x$ şi $13/x\Rightarrow 104/x(fals)$.

II.

$8/x$ şi $13/x+1\Rightarrow x=8\cdot l$ şi $x+1=13\cdot s$;

$13s-1\le 99\Rightarrow s\le 7$;

$13s-8l=1\Leftrightarrow 13s-8l=65-64\Leftrightarrow 13\cdot(s-5)=8\cdot(l-8)\Rightarrow 8/(s-5)$ şi $13/(l-8)$;

$$\begin{cases} 8/(s-5) \\ s\le 7 \end{cases}\Rightarrow s=5\Rightarrow x=64, y=40, z=96.$$

III

$8/x+1$ şi $13/x\Rightarrow x+1=8\cdot l$ şi $x=13\cdot s$;

. $13s-8l=-1\Leftrightarrow 13s-8l=64-65\Leftrightarrow 13\cdot(s+5)=8\cdot(l+8)\Rightarrow 8/(s+5)$ şi $13/(l+8)$;

$$\begin{cases} 8/(s+5) \\ s\le 7 \end{cases}\Rightarrow s=3\Rightarrow x=39, y=15, z=21.$$

IV. $8/x+1$ şi $13/x+1\Rightarrow 104/x+1(fals)$.

Răspuns: $(64,40,96);(39,15,21)$.